Capítulo 2

Relaciones y Funciones

2.1. Producto Cartesiano

Definición

El producto cartesiano de A y B, se define por

$$A \times B = \{(a, b)/a \in A \wedge b \in B\}$$

A y B conjuntos dados , $A \times B$ se lee A cruz B
(a, b) es un par ordenado, recuerde que a es el primer elemento del par y b es el segundo, en consecuencia $(a, b) \neq (b, a)$

Número de elementos

Sea m el número de elementos de A (es decir su cardinalidad) y n el número de elementos de B, entonces mn es el número de elementos de los productos $A \times B$ y $B \times A$

Gráfico

Como los elementos de $A \times B$ son pares ordenados se acostumbra graficar dicho conjunto en un sistema de coordenadas rectangulares, es decir

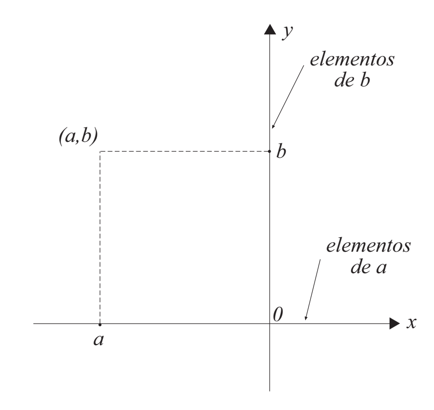


Figura 2.1: Sistema de coordenadas

Ejemplo1

Los gráficos siguientes representan a ciertos productos cartesianos dados. Notemos que en el caso de la figura 2.2 el número de elementos de AxB es finito (en este caso 7), en tanto que en los casos de las figuras 2.3 y 2.4 dicho número es infinito.

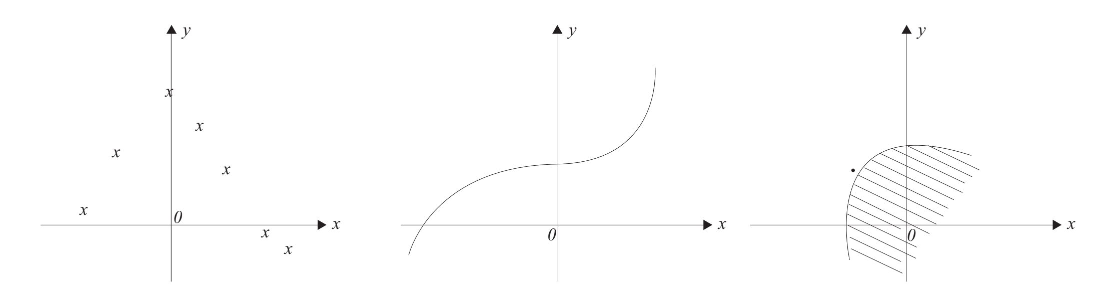


Figura 2.2 Figura 2.3 Figura 2.4

Propiedades 1

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

2.2. Relaciones

Definición

R es una relación de A en B si y solo si: $R \subseteq A \times B$.
Así, notemos que los elementos de una relación son pares ordenados.

Notación

1. R es una relación de A en B, también se denota por $R : A \to B$
2. Si el par (x, y) pertenece a la relación R, se acostumbra a denotar por $(x, y) \in R \vee xRy \vee y = R(x)$

Dominio y Recorrido

Sea $R \subseteq A \times B$ una relación, se definen:

Dominio de R por el conjunto

$$Dom\ R = \{x \in A / \exists y \in B : (x, y) \in R\}$$

Recorrido de R por el conjunto

$$Rec\ R = \{y \in B / \exists x \in A : (x, y) \in R\}$$

Es claro que $Dom\ R \subseteq A$ y que $Rec\ R \subseteq B$

Ejemplo 2

Sea $R : A \to A$ una relación, donde A=$\{1, 2, 3..., 10\}$ dada por

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (7, 6)\}$$

esta relación tiene un número finito de elementos. Note que: $Dom\ R$={1,2,7} y $Rec\ R$={1,2,3,4,5,6}

Ejemplo 3

Sea $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$S = \{(x, y)/x + 2y = 12\}$$

esta es una relación con infinitos elementos y que $Dom\ S = Rec\ S = \mathbb{R}$

Ejemplo 4

Sea $S : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Nótese que x e y son enteros por tanto esta relación solo consta de 4 elementos, que son: (1,0), (0,1), (-1,0) y (0,-1), donde $Dom\ S = \{-1, 0, 1\} = Rec\ S$
En este mismo ejemplo si en lugar de $\mathbb{Z}$ se toma $\mathbb{R}$ la relación contiene infinitos pares ordenados y
$Dom\ S = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\}$
$Rec\ S = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$

Definición

Sean $R : A \to B$ y $S : B \to C$ dos relaciones. Se define la composición de R con S, que se denota por $S \circ R$, como

$$S \circ R = \{(x, y)/\exists z \in B : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}$$

Ejemplo 5

Sean A={1,2,3,4,5} , B={1,2,3} y C={1,4,5,8} y R={(1,2),(3,2),(4,1)} y S={(2,1),(3,1),(2,4),(3,5)} Note que (1,2) $\in R \wedge$ (2,1) $\in S \Rightarrow$ (1,1) $\in S \circ R$.

Así se obtiene que $S \circ R$={(1,1),(1,4),(3,1),(3,4)}

Ejemplo 6

Sean R y S relaciones en $\mathbb{R}$, definidas por

$$R = \{(x, y)/y = 2x + 1\}$$
$$S = \{(x, y)/x^2 = y\}$$

así, $(x, y) \in SoR \Leftrightarrow \exists\ z \in R : (x, z) \in R\ \wedge (z, y) \in S \Leftrightarrow z = 2x + 1 \wedge y = z^2$ de donde $y = (2x + 1)^2$, luego
$S \circ R = \{(x, y)/y = (2x + 1)^2\}$

Propiedades

Sea $R : A \to A$ una relación, se define las siguientes propiedades

1. Refleja $\forall x \in A : (x, x) \in R$
2. Simétrica $x, y \in A : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
3. Transitiva $x, y, z \in A : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$
4. Antisimétrica $x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
5. Irrefleja $\forall x \in A : (x, x) \notin R$

Definición

Sea $R : A \to A$ una relación

1. Se dice que R es una relación de equivalencia si y solo si, es: Refleja, Simétrica y Transitiva.
2. Se dice que R es una relación de orden parcial si y solo si, es: Refleja, Antisimétrica y Transitiva.
3. Se dice que R es una relación de orden total (estricto) si y solo si, es Irrefleja, Transitiva y Antisimétrica.

2.3. Clase de equivalencia

Definición

Sea $R : A \to A$ una relación de equivalencia, se define la clase de equivalencia del elemento x, por

$$C_x = \{y \in A/(x, y) \in R\}$$

Ejemplo 7

En $\mathbb{Z}$, se define la relación R, por

$$R = \{(x, y)/(x - y) \text{ es múltiplo de } 3\}$$

vamos a verificar que esta relación es: ***refleja***, ***simétrica*** y ***transitiva***, por tanto es de ***equivalencia***, luego determinaremos la clase del elemento 2, finalmente todos los pares (2,y) $\in R$ tales que $3 \leq y \leq 18$ Nótese que: $(x, y) \in R \Leftrightarrow x - y = 3k, k \in \mathbb{Z}$

Refleja: $\forall x \in \mathbb{Z}, x - x = 3 \cdot 0, 0 \in \mathbb{Z}$
Simétrica: $(x, y) \in R \leftrightarrow x - y = 3k, k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow y - x = 3(-k), -k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow (y, x) \in R$
Transitiva: $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Leftrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}/x - y = 3k_1 \wedge y - z = 3k_2$
Sumando miembro a miembro se obtiene $x - z = 3(k_1 + k_2), k_1 + k_2 = k$ con $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - z = 3k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x, z) \in R$

Así $C_2 = \{y \in \mathbb{Z}/(2, y) \in R\} \Rightarrow C_2 = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, 11, ...\}$
o bien $C_2 = \{y = 2-3k, k \in \mathbb{Z}\}$ todos los pares $(2, y) \in R$ tales que $3 \leqslant y \leqslant 18$, son {(2,2),(2,5),(2,8),(2,11),(2,14),(2,17)}

2.4. Relación inversa

Relación inversa

Sea $R : A \to B$ una relación dada. Se define $R^{-1} : B \to A$ como:

$$R^{-1} = \{(x, y) \in B \times A : (y, x) \in R\}$$

Nótese que $Dom\ R^{-1} = Rec\ R$ y $Rec\ R^{-1} = Dom\ R$
También que si: $(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$ por tanto $(R^{-1})^{-1} = R$

Ejemplo 8

Sea $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ entonces de inmediato
$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$

Ejemplo 9

Sea R definida en los racionales por
$R = \{(x, y)/2x+y = 12\}$ entonces su relación inversa es $R^{-1} = \{(x, y)/2y+x = 12\}$

2.5. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

Sean A, B y C conjuntos no vacíos. Demostrar que

a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

b) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

Demostración
a) Sea $(x, y) \in [(A \cap B) \times C] \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge y \in C$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C)$
$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \wedge (x, y) \in (B \times C)$
$\Leftrightarrow (x, y) \in [(A \times C) \cap (B \times C)]$
luego $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

b)
i) Sea $(x, y) \in [(A - B) \times C] \Leftrightarrow x \in (A \cap B^c) \wedge y \in C$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge x \notin B$
$\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \wedge (x, y) \notin (B \times C)$
$\Rightarrow (x, y) \in [(A \times C) - (B \times C)]$
Luego se demostró que $(A - B) \times C \Rightarrow (A \times C) - (B \times C)$ (1)

ii)$(x, y) \in (A \times C) - (B \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \wedge (x, y) \notin (B \times C)$
$\Rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C)$
$\Rightarrow (x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C)$
$\Rightarrow (x \in (A - B) \wedge y \in C) \vee (x \in A \wedge F)$
$\Rightarrow (x, y) \in [(A - B) \times C]$ (2)
Luego por (1) y (2) se tiene que: $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

Ejercicio 2

Sean S, T relaciones de $X \rightarrow Y$, pruebe que:

a) $(S^{-1})^{-1} = S$

b) $(S \cap T)^{-1} = S^{-1} \cap T^{-1}$

Prueba

a) $(x,y) \in (S^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in S^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in S$
b) $(x,y) \in (S \cap T)^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in (S \cap T)$
$\Leftrightarrow (y,x) \in S \wedge (y,x) \in T$
$\Leftrightarrow (x,y) \in S^{-1} \wedge (x,y) \in T^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in (S^{-1} \cap T^{-1})$
Luego $(S \cap T)^{-1} = S^{-1} \cap T^{-1}$

Ejercicio 3

Sea R una relación de equivalencia de A en A. Demuestre que R^{-1} también es una relación de equivalencia.

Demostración:
i) **Refleja:** $\forall x \in A, (x,x) \in R \Leftrightarrow (x,x) \in R^{-1}$
Luego R^{-1} es refleja

ii)**Simétrica:** $(x,y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in R \Leftrightarrow (x,y) \in R$
por ser R simétrica, como $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R^{-1}$
luego R^{-1} es simétrica.

iii)**Transitiva:** $(x,y) \in R^{-1} \wedge (y,z) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in R \wedge (z,y) \in R$ de aquí $(z,x) \in R \Rightarrow (x,z) \in R^{-1}$ esto prueba que R^{-1} es transitiva.

Ejercicio 4

Sean $S : A \to B$ y $R : B \to C$ dos relaciones demostrar que:
$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

Demostración:

$\forall (x,y) \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in (R \circ S) \Leftrightarrow \exists z \in B : (y,z) \in R \wedge (z,x) \in S$
$\Leftrightarrow (z,y) \in R^{-1} \wedge (x,z) \in S^{-1}$
$\Leftrightarrow \exists z \in B : (x,z) \in S^{-1} \wedge (z,y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in S^{-1} \wedge (z,y) \in R^{-1} \Leftrightarrow$ $(x,y) \in (S^{-1} \circ R^{-1})$
luego $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

Ejercicio 5

Sea $R : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ definida por $(a,b)\ R\ (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$
pruebe que R es una relación de equivalencia ($\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$) y determine la clase del elemento $(1,2)$

Prueba

i)**Relfleja:** $\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Leftrightarrow a + b = b + a \Leftrightarrow (a,b)R(a,b)$

ii)**Semétrica:** $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c \Leftrightarrow c+b=d+a \Leftrightarrow (c,d)R(a,b)$

iii)**Transitiva:**$(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \Leftrightarrow a+d=b+c \wedge c+f=d+e$ sumando miembro a miembro resulta $a+d+c+f=b+c+d+e$ de donde $a+f=b+e \Leftrightarrow (a,b)R(e,f)$

$C_{(1,2)} = \{(n,m)/(1,2)R(n,m); n,m \in \mathbb{N}\}$
$C_{(1,2)} = \{(n,m)/1+m=2+n\} = \{(n,m)/m-n=1\}$

Ejercicio 6

Sea $R : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una relación definida por:
$R = \{(n,m)/n+3m=12; n,m \in \mathbb{N}\}$

a) Exprese R como un conjunto de pares ordenados
b) Hallar *Dom* R y el *Rec* R
c) Determine R^{-1}

Solución

a) $R = \{(9,1),(6,2),(3,3)\}$

b) *Dom* $R = \{3,6,9\}$, *Rec* $R = \{1,2,3\}$

c) $R^{-1} = \{(1,9),(2,6),(3,3)\}$ o bien $R^{-1} = \{(n,m)/m+3n=12, n,m \in \mathbb{N}\}$

Ejercicio 7

Sea R una relación de equivalencia en $A = \{a,b,c,d,e\}$ demuestre que si:
$(a,c),(b,d)$ y $(b,c) \in R \Rightarrow (d,a) \in R$

Demostración

Por hipótesis R es refleja, simétrica y transitiva.
Por ser simétrica: $(b,d) \in R \Rightarrow (d,b) \in R \wedge (a,c) \in R \Rightarrow (c,a) \in R$
Por ser transitiva: $(d,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (d,c) \in R$
Entonces $(d,c) \in R \wedge (c,a) \in R \Rightarrow (d,a) \in R$

Ejercicio 8

Sean R y S dos relaciones dadas por
$R = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,2),(b,3),(c,3)\}$
$S = \{1,x),(2,x),(3,y)\}$
Determine: $S \circ R$, $R^{-1} \circ S^{-1}$ y $S^{-1} \circ R^{-1}$

Solución:

Nótese que *Dom* $R = \{a,b,c\} = A$, *Rec* $R = \{1,2,3\} = B$

$Dom\ S = B$ y $Rec\ S = \{x, y\} = C$

Así: $R : A \to B$ y $S : B \to C$, $S \circ R : A \to C$
$S \circ R = \{(u, v) \in A \times C : \exists y \in B/(u, y) \in R \wedge (y, v) \in S\}$
luego $S \circ R = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, y)\}$
análogamente como $R^{-1} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (2, b), (3, b), (3, c)\}$ y
$S^{-1} = \{(x, 1), (x, 2), (y, 3)\}$ se tiene que $R^{-1} \circ S^{-1} = \{(x, a), (x, b), (y, a), (y, b), (y, c)\}$
note que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$ (Ver ejercicio 4)
$S^{-1} \circ R^{-1}$ es vacía pues si $(x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$ con $R^{-1} : B \to A \wedge S^{-1} : C \to B$
y $A \neq C$.

Ejercicio 9

Si $R : A \to A$ es transitiva demuestre que R^{-1} también es transitiva.

Demostración:
Por demostrar que si:

$(x, y) \in R^{-1} \wedge (y, z) \in R^{-1} \Rightarrow (x, z) \in R^{-1}$
$(x, y) \in R^{-1} \wedge (y, z) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R \wedge (z, y) \in R \Leftrightarrow$
$(z, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow (z, x) \in R \to (x, z) \in R^{-1}$ como se quería

Ejercicio 10

Sea $R : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$(k, p) \in R \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}^+ : k = mp$$

demuestre que R es una relación de orden parcial.

Demostración

Debemos demostrar que R es: refleja, transitiva y antisimétrica.

Refleja:
$\forall z \in \mathbb{Z}, \exists 1 \in \mathbb{Z}^+ : 1z = z \Leftrightarrow (z, z) \in R$

Transitiva:
$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Leftrightarrow \exists m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+/a = m_1 b \wedge b = m_2 c \Leftrightarrow$
$a = m_1 m_2 c$, sea $m_1 m_2 = m$; $m \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow a = mc \Leftrightarrow (a, c) \in R$

Antisimétrica:
$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Leftrightarrow \exists m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+/a = m_1 b \wedge b = m_2 a \Leftrightarrow$
$\exists m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+/a = m_1 m_2 a$, ahora:
Si $a \neq 0 \Rightarrow m_1 m_2 = 1$ como $m_1 \wedge m_2 \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m_1 = m_2 = 1$ en cuyo caso $a = b$.
Si $a = 0 \Leftrightarrow b = 0, \forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$ así también $a = b$

Ejercicio 11

En el conjunto de los números reales se define la siguiente relación T:

$$(x, y) \in T \Leftrightarrow k^2 - kx + x^2 = 4 + ky - y^2$$

a)Determinar los valores de k para los cuales T es simétrica

b)Determinar los valores de k para los cuales T es refleja.

Solución:

a)$(x, y) \in T \Leftrightarrow k^2 - kx + x^2 = 4 + ky - y^2$ note que si $k = -2 \Rightarrow 4 + 2x + x^2 = 4 - 2y - y^2 \Leftrightarrow 4 + 2y + y^2 = 4 - 2x - x^2 \Leftrightarrow (y, x) \in T$

b)$\forall x \in \mathbb{R}$ se debe tener $(x, x) \in T$, esto es que se cumpla $k^2 - kx + x^2 = 4 + kx - x^2 \Leftrightarrow k^2 - 2xk + 2x^2 - 4 = 0$
$k = x \pm \sqrt{4 - x^2}$ ecuación sólo válida para ciertos valores de x, lo que contradice el $\forall x \in \mathbb{R}$, por lo que no existe k.

Ejercicio 12

Sea $f : A \to A$ una función , se define la relación en A por

$$aRb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

demuestre que R es una relación de equivalencia.
Demostración:

i) $\forall x \in A : f(x) = f(x) \Leftrightarrow xRx$ lo que prueba que R es refleja.
ii)$xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = f(x) \Leftrightarrow yRx \Rightarrow R$ es simétrica.
iii)$xRy \wedge yRz \Leftrightarrow f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow xRz \Rightarrow R$ es transitiva.

Ejercicio 13

Sea S una relación en el conjunto de los números reales definida por:

$$xSy \Leftrightarrow 0 \leq x - y \leq 1$$

Graficar: S y S^{-1}

Solución:

$xSy \Leftrightarrow x - y \geq 0 \wedge x - y \leq 1$ graficamos primero las fronteras de S, es decir: $x - y = 0 \wedge x - y = 1$ para luego considerar las desigualdades, ver gráfico de la figura 2.5

Para S^{-1} hacemos la simetría de gráfico de S con respecto a la recta $y = x$, ver gráfico de la figura 2.6, note que $xS^{-1}y \Leftrightarrow 0 \leq y - x \leq 1$ por definición de inversa.

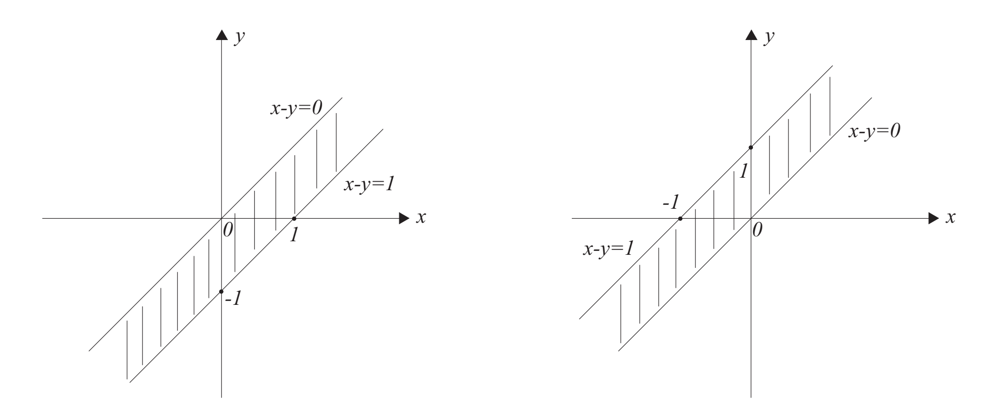


Figura 2.5: Gráfico de S Figura 2.6: Gráfico de S^{-1}

Ejercicio 14

En $\mathbb{R}$ se dan las relaciones

$$R = \{(x, y)/y \geq x^2\}$$
$$S = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 1\}$$

a) Grafique: $R \cap S, R^{-1}, S^{-1}$ y $R^{-1} \cap S^{-1}$
b) Determine: $Dom\ (R \cap S), Rec\ (R \cap S)$
Solución:

$R \cap S = \{(x, y)/y \geq x^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$

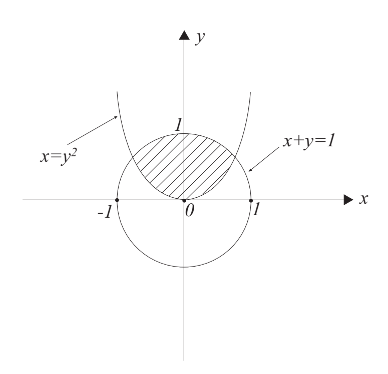


Figura 2.7: Gráfico de $R \cap S$

Note que el dominio de $R \cap S$ está dado por la intersección de sus fronteras, es decir, la solución del sistema:

$$y = x^2$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x^4 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x \simeq \pm 0{,}79$$

así $Dom\ \ R \cap S = \{x/ - 0{,}79 \leq x \leq 0{,}79\}$
y el $Rec\ \ R \cap S = \{y/0 \leq y \leq 1\}$
$R^{-1} = \{(x, y)/x \geq y^2\}$ y $S^{-1} = \{(x, y)/y^2 + x^2 \leq 1\} = S$

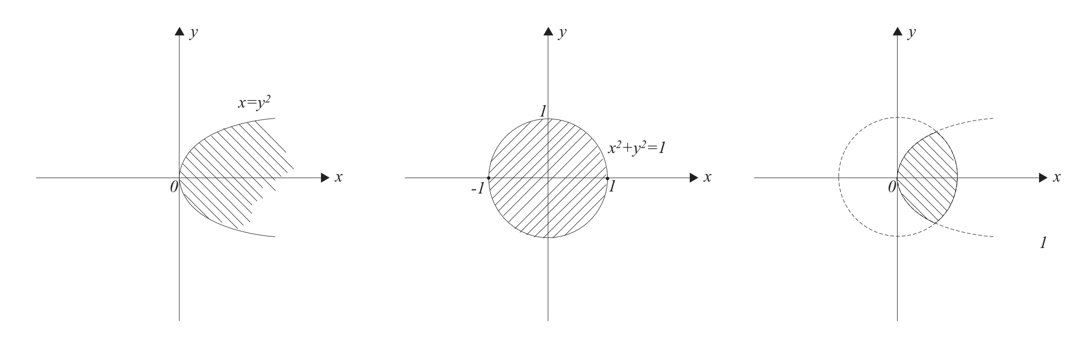


Figura 2.8: Gráfico de R^{-1}

Figura 2.9: Gráfico de S^{-1}

Figura 2.10: Gráfico de $R^{-1} \cap S^{-1}$

Ejercicio 15

Graficar las siguientes relaciones definidas en los reales

a) $R = \{(x, y)/0 \leq x \leq 2 \wedge -1 \leq y < 1\}$
b) $S = \{(x, y)/y \leq \frac{1}{2}x + 2\}$
c) $T = \{(x, y)/|x| + |y| \leq 1\}$
d) $L = \{(x, y)/x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$

Solución:

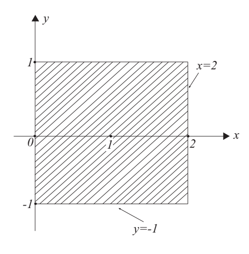


Figura 2.11: Gráfico de R

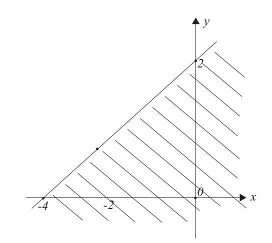


Figura 2.12: Gráfico de S

Para T si

$$\begin{array}{rcl} x \text{ e } y > 0 & \Rightarrow & x + y \leq 1 \\ x < 0 \text{ e } y > 0 & \Rightarrow & -x + y \leq 1 \\ x > 0 \text{ e } y < 0 & \Rightarrow & x - y \leq 1 \\ x \text{ e } y < 0 & \Rightarrow & -x - y \leq 1 \end{array}$$

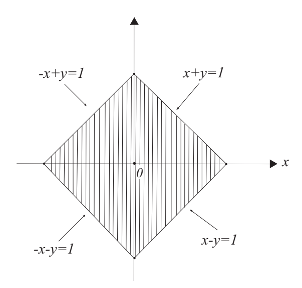


Figura 2.13: Gráfico de T

Para L, su frontera es una elipse con centro en el origen, cuyo semieje mayor está sobre el eje Y, y es igual a 2, y el menor sobre el eje X y es igual a 1, luego:

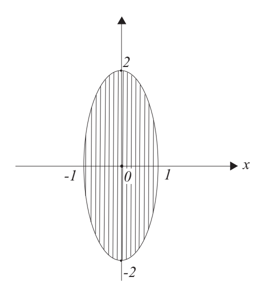


Figura 2.14: Gráfico de L

2.6. Ejercicios propuestos

1. Sea R una relación en $A = \{2, 3, 4, 5\}$ definida por "$x\, e\, y$ son primos relativos", esto es "el único divisor común de x e y es 1"

   i) Escribir R como un conjunto de pares ordenados.

   ii) Representar R en un diagrama de coordenadas $A \times A$.

2. Sea R una relación definida en los naturales,

$$R = \{(x, y) : 2x + 3y = 13;\ x, y \in \mathbb{N}\}$$

   i) Escribir R como un conjunto de pares ordenados.

   ii) Hallar el dominio y recorrido de R.

   iii) Determine R^{-1}

3. Sea R una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por:

   i) $R = \{(x, y)\,(-2 \leq x < 2 \wedge -2 \leq y \leq 2) \vee (-5 < x < -1) \wedge (-1 < y \leq -3)\}$

   ii) $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$

   iii) $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

   iv) $R = \{(x, y) : x^2 + 2y < 1\}$

   v) $R = \{(x, y) : x + y \geq 0\}$

   Representar cada relación en un diagrama de coordenadas $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y determine su dominio y recorrido.

4. Sean $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dos relaciones definidas por:

$$R = \{(n, m) : n + m = 17\};\quad S = \{(n, m) : n\,m = 36\}$$

   Encuentre el dominio y recorrido de: R, S y $R \cap S$.

5. Sea $A = \{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$, sean $a, b \in A$ y R definida por aRb si y solo si al dividir a y b por 5 dan el mismo resto. Averigue si R es una relación de equivalencia.

6. Considere las siguientes relaciones en $\mathbb{R}$:

   $R_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$; $R_2 = \{(x, y) : y \geq \frac{3}{4}x\}$ y $R_3 = \{(x, y) : y \geq \frac{4}{9}x^2\}$

   Representar: $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cap R_3$, $R_1 \cap R_3^c$ y $R_1^c \cup R_2$ en un diagrama de coordenadas $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ estableciendo el dominio y recorrido de cada una de ellas.

7. Sea R una relación en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por:

   $$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$$

   Demostrar que R es: refleja, antisimétrica y transitiva.

8. Sea R una relación en A.

   a) Si R es simétrica y transitiva, averiguar si R es refleja.

   b) Si R es refleja y transitiva, averiguar si R^{-1} es también refleja y transitiva.

   c) ¿Es, $R \cap R^{-1}$ una relación de equivalencia?

9. Siendo R_1 y R_2 dos relaciones de $A \to B$, probar que

   $$Rec(R_1 \cap R_2) \subseteq Rec\, R_1 \cap Rec\, R_2$$

10. Sea R una relación en A. Demostrar que R es simétrica si y solo si $R = R^{-1}$

11. En $\mathbb{Z}$ se define la relación R mediante: $aRb \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} : a - b = 3\,k)$

    Probar que R es de equivalencia.

12. 12. Averiguar las propiedades que tiene la relación R definida en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,por:

    $$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a\,d = b\,c$$

    ¿Es posible determinar R^{-1}? en caso afirmativo encuéntrela.

2.7. Funciones

Definición

Sea $f : A \to B$ una relación, se dice que f es una función si y solo si

$$\forall x \in A, \exists! y \in B : y = f(x)$$

$\exists!$ se lee existe un único.
Este concepto, de función, también se puede definir mediante

1. $Domf = A$
2. $(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Note que una función es antes que nada una relación, es por esto que el $Domf$ y $Recf$ se encuentran ya definidos, también otros conceptos y propiedades definidas anteriormente. Quizás hay que recalcar que

$$Domf = A \text{ y } Recf \subseteq B$$

En $y = f(x)$ fórmula típica por cada función

$$x \in Domf \text{ e } y \text{ o } f(x) \in Recf$$

A, x se le llama pre-imagen y a y o $f(x)$ imagen de x, así una vez más, de la definición es importante hacer notar que para cada pre-imagen x se tiene una y solo una imagen y.

Funciones por tramos

Definición

Una función por tramos se puede definir como:
Sea $f : A \to B$ una función. $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdot \cup A_n$ en que $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall\, i \neq j$ y tal que $f_i : A_i \to B_i$ es una función $\forall\, i = 1, 2, \cdots\cdot n$ y $B_i \subseteq B$. (Ver ejemplos 11 y 12)

Ejemplo 10

Dadas las relaciones en $\mathbb{R}$

a) $y = 2x + 1$

b) $y^2 = x^2 + 2$

Ambas se pueden escribir también por
$f(x) = 2x + 1$ y $g^2(x) = x^2 + 2$
f es una función pues $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R} :\ y = 2x + 1$
g no es una función pues por ejemplo para $x = \sqrt{2}$ existen $y_1 = 2$ e $y_2 = -2$, $y_1 \neq y_2$

Ejemplo 11

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$ esta relación así definida no es una función pues $Dom\ f \neq \mathbb{R}$, $x = -1$ no tiene imagen.

Ejemplo 12

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por tramos mediante

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x\leqslant 3,\\ -2x & \text{si } x\geqslant 3.\end{cases}$$

Notamos que f no es una función pues $f(3)$ no tiene una sola imagen.

Ejemplo 13

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x\leqslant -1\\ -x+3 & \text{si } -1<x<2\\ -x^2+5 & \text{si } x\geqslant 2\end{cases}$$

$f(x)=2$, $\forall x\leqslant -1$ se llama función constante
$f(-1)=2$, $f(0)=3$, $f(10)=-10^2+5=-95$
$f(f(2))=f(1)=-1+3=2$

$$f(2x)=\begin{cases} 2 & \text{si } 2x\leqslant -1\\ -2x+3 & \text{si } -1<2x<2\\ -(2x)^2+5 & \text{si } 2x\geqslant 2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$f(2x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x\leqslant \frac{-1}{2}\\ -2x+3 & \text{si } \frac{-1}{2}<x<1\\ -4x^2+5 & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$$

Propiedades

Función Inyectiva o uno a uno

Sea $f:A\to B$ una función. f es **uno a uno** si y solo si : $\forall x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ o bien es equivalente a decir $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Note la importancia del sentido de las implicaciones.

Ejemplo 14

Sea: $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$.
Esta función es uno a uno pues

$$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}-\{-1\} \text{ si } f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{2x_1-1}{x_1+1}=\frac{2x_2-1}{x_2+1}\Leftrightarrow$$

$$2x_1x_2+2x_1-x_2-1=2x_1x_2+2x_2-x_1-1\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Ejemplo 15

Sea: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Note que esta función aparentemente es uno a uno pues $\forall x > 0$ lo es, como también $\forall x \leq 0$, pero no es suficiente pues por ejemplo, para $y = -1$ se tienen dos preimágenes que son $x = -1$ o $x = 3$.

Función sobre o epiyectiva

Sea: $f : A \rightarrow B$ una función. f es **sobre** si y solo si $\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$ o bien es equivalente a decir que $Rec\ f = B$.

Ejemplo 16

La función del ejemplo 14 no es sobre pues, para $y = 2$ no tiene pre imagen, lo que contradice el $\forall y \in \mathbb{R}$

Ejemplo 17

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 1, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

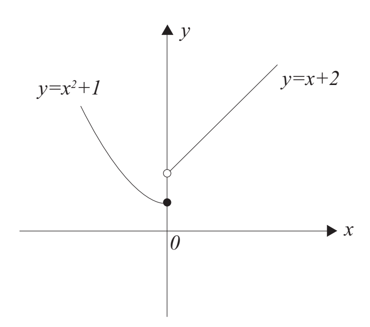


Figura 2.15: Gráfico de $f(x)$

Esta función es sobre, pues:
Si $x \leq 0 \Rightarrow y = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$ como $x \leq 0 \Rightarrow x = -\sqrt{y-1}$ lo que es válido solo si $y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$ (1)

Si $x > 0 \Rightarrow y = x + 2 \Leftrightarrow x = y - 2$ como $x > 0 \Rightarrow y - 2 > 0 \Leftrightarrow y > 2$ (2)

Luego, efectuando la unión de (1) y (2) resulta que el $Rec\ f = [1, +\infty)$ lo que prueba que f es sobre.

Función biyectiva

Sea: $f : A \to B$ una función. f es **biyectiva** si y solo si es : **uno a uno y sobre.**

2.8. Gráfico de una función

Dada $f : A \to B$ una función. Su gráfica se esboza en un sistema coordenado rectangular y está definido mediante un conjunto de puntos

$$G_f = \{(x, y)/\exists x \in A, \exists y \in B : y = f(x)\}$$

Debido a la definición de la función, el gráfico G_f de f está limitado a curvas en el plano xy, y lamentablemente no toda curva es una función. (1) es una función en tanto que (2) no lo es.

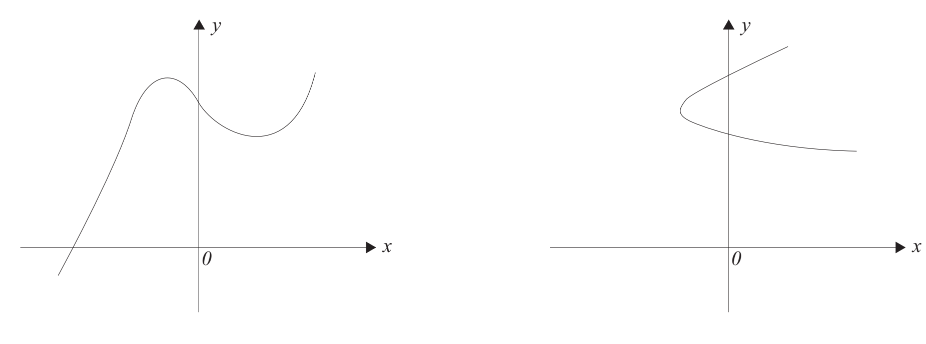


Figura 2.16: (1) Figura 2.17: (2)

Observación

Esbozar la gráfica de $f(x)$ actualmente es un problema resuelto, si es el caso que se ocupa para ello un computador. En este libro y en el siguiente de Cálculo I, no es la idea ocupar un procesador para graficar f, sino más bien es seguir ciertos conceptos, como por ejemplo, determinar: *Dom* f, intersecciones con los ejes, signos de $f(x)$, si $f(x)$ es primer grado, o de segundo, o de otro para x, considerar extremos de x o bien singulares con respecto a su dominio. En resumen, considerar a $f(x)$ y sus conceptos fundamentales.
Graficar $f(x)$ no es un problema sencillo en un principio, pero en ningún caso imposible.

2.9. Función inversa

Propiedad

Sea: $f : A \to B$ una función, f es una biyección si y solo si f^{-1} es una función

Demostración

Sea : f uno a uno y sobre vamos a probar que f^{-1} es una función.
Como f es sobre todos los elementos de B tienen una pre imagen, así que $\forall y \in B, \exists! x \in A$ esto por ser uno a uno, tal que $f^{-1}(y) = x$ lo que asegura que f^{-1} es una función, la implicación recíproca queda propuesta para Ud.
La afirmación de esta propiedad, que existe f^{-1} equivale a decir que la ecuación $y = f(x)$, donde $y \in B$, tiene una y solo una solución, $x \in A$. Como hemos indicado esta solución se representa por $f^{-1}(y)$ así entonces $x = f^{-1}(y)$ donde y es la variable independiente y x es la variable dependiente. La definición de función inversa es análoga a la de relación inversa con ciertas precauciones.

Gráfico de f^{-1}

Sea $f : A \to B$ una función biyectiva tal que su gráfica está dada por los puntos.

$$Gf = \{(x, y)/\forall x \in A, \exists y \in B : y = f(x)\}$$

El gráfico de f^{-1} puede considerarse el mismo conjunto de puntos que forma la gráfica de f y que ésta viene representada por la ecuación $x = f^{-1}$.
Si se quiere dejar la letra x, para la variable independiente (e y para la variable dependiente), la inversa de f vendrá representada por la ecuación $y = f^{-1}(x)$.
En tal supuesto, la gráfica de f^{-1} resulta simétrica con respecto a la recta $x = y$, de la gráfica de f

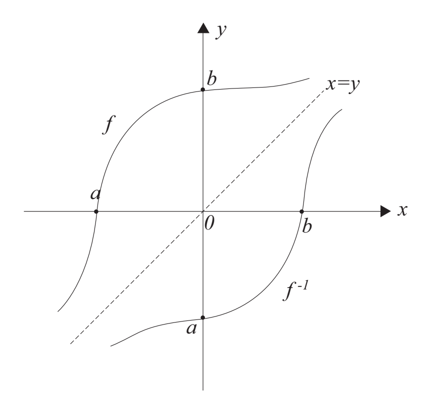


Figura 2.18: Gráfico de f y f^{-1}

2.10. Composición

Sean las funciones $g : A \to B$ y $f : B \to C$, $Rec\ \ g \subseteq B$

$$\forall x \in A, \exists z \in B/z = g(x) \tag{2.1}$$

$$\forall z \in Rec\ \ g, \exists y \in C/y = f(z) \tag{2.2}$$

De (1) y (2) se concluye que $y = f(g(x))$ lo cual también se acostumbra denotar por $y = (f \circ g)(x)$ luego $(f \circ g) = f(g(x))$.

Ejemplo 18

En $\mathbb{R}$ sean las funciones $f(x) = 2x + 5$ y $g(x) = x^2 - 1$.
Note que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) + 5 = 2x^2 + 3$ y

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) = (2x + 5)^2 - 1 = 4x^2 + 20x + 24$$

Este ejemplo es suficiente para hacer notar que en general $f \circ g \neq g \circ f$

Propiedad

Sea: f y g dos funciones, entonces $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.
La demostración queda propuesta para Ud.

Ejemplo 19

En $\mathbb{R}$, sean las funciones:

$$f(x) = \frac{4}{x}, x \neq 0 \text{ y } g(x) = \frac{1-x}{x}, x \neq 0$$

Vamos a determinar los dominios de $f \circ g$ y $g \circ f$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1-x}{x}) = \frac{4x}{1-x} \Rightarrow Dom\ \ f \circ g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{4}{x}) = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow Dom\ \ g \circ f = \mathbb{R} - \{0\}$$

2.11. Algebra de funciones

Definición

Sean: $f : A \to B$ y $g : A \to C$ cuyos dominios son $Dom\ f$ y $Dom\ g$ se definen:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de $f + g$, $f - g$ y fg es el conjunto de todos los elementos comunes a los dominios de f y g
$Dom\ (f + g) = Dom\ (f - g) = Dom\ fg = Dom\ f \cap Dom\ g$
Para $Dom\ \frac{f}{g} = Dom\ f \cap Dom\ g$, excepto para aquellos x para los cuales $g(x) = 0$.

Ejemplo 20

Sea: $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 - 1$ entonces:

$$f(x) + g(x) = 2x + x^2$$

$$f(x) - g(x) = 2x - x^2 + 2$$

$$f(x)g(x) = (2x + 1)(x^2 - 1),$$

$$Dom\ \ f + g = Dom\ \ f - g = Dom\ \ f \cdot g = \mathbb{R}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}, Dom\ \ \frac{f}{g} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

2.12. Ejercicios Resueltos

1. Sea $f(x) = a\,x + b$ una función en $\mathbb{R}$, a y b constantes. Determine a y b en los siguientes casos:

   i) $(1, -2) \in f \ \wedge \ f(0) = 4$

   ii) $f(1) = g(1) \ \wedge \ f(-1) = \frac{4}{3}$ donde $g(x) = \frac{2}{x+2}$

   Solución.

   i) $(1, -2) \in f \Rightarrow f(1) = -2 \Leftrightarrow a + b = -2$ por otra parte $f(0) = 4$ $\Leftrightarrow b = 4$ con lo que resulta $a = -6$. Así $f(x) = -6\,x + 4$

   ii) $f(1) = g(1) \Rightarrow a + b = \frac{2}{3} \wedge f(-1) = \frac{4}{3} \Rightarrow -a + b = \frac{4}{3}$ de donde resolviendo este sistema de ecuaciones resultan: $a = -\frac{1}{3} \wedge b = 1 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\,x + 1$

2. Determine el dominio y recorrido de las siguientes funciones definidas sobre los reales

   a) $f(x) = 3\,x^2 - 1$

   b) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

   c) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

   d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}-2}$

   e) $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$

   f) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$

   g) $f(x) = \frac{x^2-2x}{4-x^2}$

   Solución.

   a) Dom $f = \mathbb{R}$, para el recorrido $y = 3\,x^2 - 1 \Rightarrow 3\,x^2 = y + 1$ como 3 $x^2 \geq 0 \Rightarrow y + 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq -1 \Rightarrow$Rec $f = [-1, +\infty]$

   b) Dom $f = \mathbb{R}$, para el recorrido $x^2 - 4x + 1 = y \Rightarrow (x-2)^2 = y + 3 \Rightarrow y \geq -3 \Rightarrow$Rec $f = [-3, +\infty]$

c) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$, para el recorrido $y = \frac{x}{x-2} \Rightarrow x = \frac{2y}{y-1} \Rightarrow$Rec $f = \mathbb{R} - \{1\}$

d) Dom $f \Rightarrow \sqrt{x-2} - 2 \neq 0 \ \wedge \ x - 2 \geq 0 \ \Rightarrow$Dom $f = [2,6) \cup (6,+\infty)$, para el recorrido se tiene $\sqrt{x-2} = \frac{1}{y} + 2 \Rightarrow \frac{1}{y} + 2 \geq 0$ para todo x del dominio, lo que nos da Rec $f = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (0,+\infty)$.

e) Dom $f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, para el recorrido se tiene $|x| = \frac{y+1}{y}$ que debe ser ≥ 0 por la condición del módulo$\Rightarrow$Rec $f = (-\infty, -1] \cup (0,+\infty)$

f) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$, ahora como $x^2 = \frac{4}{1-y} \geq 0 \Rightarrow y < 1 \Rightarrow$ Rec $f = (-\infty, 1)$

g) Dom $f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$, para todo x del dominio se tiene $x = \frac{-2y}{y+1} \Rightarrow y \neq -1$ pero note que si $x = 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ que tampoco debe estar en el recorrido pues $x \neq 2$, por tanto Rec $f = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}, -1\}$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x > 9 \\ x^2 - |x| & \text{si} \quad -9 \leq x \leq 9 \\ x+2 & \text{si} \quad x < -9 \end{cases}$$

a) Calcule: $f(0)$, $f(-9)$, $f(-12)$, $f(10)$ y $f(f(3))$

b) Hallar el Rec f.

Solución.

a) $f(0) = 0^2 - |0| = 0$ $f(-9) = (-9)^2 - |-9| = 72$, $f(-12) = -12 + 2 = -10$, $f(10) = 2 \cdot 10 + 5 = 25$ $f(f(3)) = f(3^2 - |3|) = f(6) = 6^2 - |6| = 30$

b) i) $\forall\, x > 9 \Rightarrow y = 2x+5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y-5)$ como $x > 9 \Rightarrow \frac{1}{2}(y-5) > 9 \Rightarrow \ y > 23$ (1)

ii) $\forall\, x : -9 \leq x \leq 9 \Rightarrow y = x^2 - |x| \Leftrightarrow (|x| - \frac{1}{2})^2 = y + \frac{1}{4} \Rightarrow y \geq -\frac{1}{4}$ $(*)$, y ahora considerando $0 \leq x \leq 9 \Rightarrow (|x| - \frac{1}{2})^2 = y + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}$ note que el signo $(-)$ no se puede considerar, luego se debe tener $0 \leq \frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}} \leq 9 \Rightarrow \sqrt{y + \frac{1}{4}} \leq \frac{17}{2} \Rightarrow y \leq 72 \quad (**)$

Análogamente $\forall\, x$:
$-9 \leq x < 0 \Rightarrow (|x| - \frac{1}{2})^2 = y + \frac{1}{4} \Leftrightarrow (-x - \frac{1}{2})^2 = y + \frac{1}{4} \Leftrightarrow$
$-x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{y + \frac{1}{4}} \Rightarrow -x = \frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}$
note que esta última implicación es por ser x negativo, luego se debe tener $-9 \leq -\frac{1}{2} - \sqrt{y + \frac{1}{4}} < 0 \Rightarrow \sqrt{y + \frac{1}{4}} \leq \frac{17}{2}$ lo mismo que en $(**)$, por tanto de $(*)$ y $(**)$ resulta:
$-\frac{1}{4} \ \leq y \leq 72$ (2)

$\forall\, x : x < -9 \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow x = y - 2 \Rightarrow y - 2 < -9 \Rightarrow$
$y < -7$ (3)

Por tanto el recorrido de f es la unión de los conjuntos dados en: (1) , (2) y (3) ;es decir $\text{Rec } f = (-\infty\,, -7) \cup [-\frac{1}{4}, +\infty)$.

4. Dadas en $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

i) Hallar el dominio y recorrido de f y g.

ii) Hallar el dominio de $f \circ g$ y también de $g \circ f$

Solución.

i) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{3}\,\}$, para el recorrido se tiene $x^2 = \frac{1}{y} + 3$ como $x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{y} + 3 \geq 0 \Rightarrow \text{Rec } f = (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup (0, +\infty)$.
$\text{Dom}\, g \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow \text{Dom } g = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Ahora como $x^2 - 1 \geq 0$
$\forall\, x \in \text{ Dom } g \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow \text{Rec } g = [0, +\infty)$

ii) $(f \circ g)\,(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 1})$ ahora si x es tal que $(x \leq -1 \,\vee\, x \geq 1) \Rightarrow$
$= \frac{1}{x^2-4} \Rightarrow x \neq \pm 2$ por tanto $\text{Dom } f \circ g = (-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [1, 2) \cup (2, +\infty)$
$(g \circ f)\,(x) = g(f(x)) = g(\frac{1}{x^2-3})$ de aquí $x \neq \pm\sqrt{3}$ entonces
$= \frac{1}{|x^2-3|}\sqrt{4 - x^2}$ el dominio obliga a $-2 \leq x \leq 2$ por tanto finalmente
$\text{Dom } g \circ f = [-2, -\sqrt{3}\,) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}\,) \cup (\sqrt{3}, 2]$

5. Determine f y la constante a de modo que

$$f(x - a)f(x + a) = x^2 - 2x - 1{,}5\, a$$

donde f es una función polinómica de grado 1.

Solución.

Sea $f(x) = b\,x + c$ la función que se indica b y c constantes reales $f(x - a)f(x + a) = [\,b(x - a) + c\,][\,b(x + a) + c\,] = x^2 - 2x - 1{,}5\, a$ de donde se obtiene $b\,x^2 + 2\,bc\,x + c^2 - b^2\,a^2 = x^2 - 2x - 1{,}5\, a \Rightarrow b = 1,\, 2\,bc = -2$ y $c^2 - b^2\,a^2 = -1{,}5\, a$, luego $b = 1$, $c = -1$ y $a = 2 \,\vee\, a = -\frac{1}{2}$ por tanto $f(x) = x - 1$

6. Sean f y g dos funciones definidas en $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 - 2x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

i) Hallar una fórmula para $(f\circ g)(x)$

ii) Grafique: $f,\, g$ y $f\circ g$.

Solución.

i) $f(g(x))=\begin{cases} f(1) & \text{si} \quad x>0 \\ f(1-2x) & \text{si} \quad x\leq 0\end{cases}\quad \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1\geq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1<1 \\ -2x & \text{si} \quad 1-2x\geq 1 \\ 1+2x & \text{si} \quad 1-2x<1\end{cases}$

Note que: $(x>0\ \wedge 1\geq 1)\Rightarrow x>0$; $(x>0\ \wedge 1<1)\Rightarrow\emptyset$; $(x\leq 0\wedge\ 1-2x\geq 1)\Rightarrow x\leq 0$; $(x\leq 0\ \wedge\ 1-2x<1)\Rightarrow\emptyset$ por tanto

$f(g(x))=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x>0 \\ -2x & \text{si} \quad x\leq 0\end{cases}$

ii)

7. Sea $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}-\{2\}$ una función dada por

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$$

Demuestre que existe f^{-1} y encuentre una fórmula para ella.

Solución.

Por demostrar que f es uno a uno y sobre

i) Uno a uno: $\forall\, x_1,x_2\in\mathbb{R}-\{-2\},\ f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{2x_1-1}{x_1+2}=\frac{2x_2-1}{x_2+2}\Leftrightarrow$ $2\ x_1x_2+4x_1-x_2-2=2\,x_1x_2+4x_2-x_1-2\Leftrightarrow x_1=x_2$ lo que prueba que f es uno a uno.

ii) Sobre: $\forall\ y\in\mathbb{R}-\{2\},\ \exists\, x=\frac{1+2y}{2-y}\ /\ f(x)=\frac{2(\frac{1+2y}{2-y})-1}{\frac{1+2y}{2-y}+2}=\frac{5y}{5}=y$, lo que prueba que f es sobre.

Por tanto existe f^{-1} y la fórmula que la define es $f^{-1}(x)=\frac{1+2x}{2-x},\ f^{-1}:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{-2\}$.

8. Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \ \wedge\ g:[-1,+\infty)$ dos funciones dadas por:

$$f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x\leq 2 \\ 4-2x & \text{si} \quad x>2\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x-1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

Demuestre que f es invertible y halle una fórmula para $(f^{-1}\circ g)(x)$

Solución.

Uno a uno: Debemos considerar necesariamente 3 casos:

i) $x_1,x_2\in(-\infty,2],\ f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 2-x_1=2-x_2\Rightarrow x_1=x_2$

ii) $x_1,x_2\in(2,+\infty],\ f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 4-2x_1=4-2x_2\Rightarrow x_1=x_2$

iii) $x_1 \in (-\infty, 2] \ \wedge \ x_2 \in (2, +\infty]$, como $x_1 \neq x_2$ vamos a demostrar que $f(x_1) \neq f(x_2)$; supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$ para x_1 y x_2 indicados, esto implica que $2 - x_1 = 4 - 2x_2 \Rightarrow x_1 = 2x_2 - 2$ pero $x_1 \leq 2 \Rightarrow 2x_2 - 2 \leq 2 \Rightarrow x_2 < 2$ lo que contradice la hipótesis, luego lo supuesto es erróneo por tanto $f(x_1) \neq f(x_2) \ \ \forall \ x_1 \neq x_2$

Sobre: $\forall x \leq 2 \Rightarrow y = 2 - x \Rightarrow x = 2 - y \Rightarrow 2 - y \leq 2 \Rightarrow y \geq 0, \ (1)$

$\forall x > 2 \Rightarrow y = 4 - 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}(4 - y) \Rightarrow \frac{1}{2}(4 - y) > 2 \Rightarrow y < 0, \ (2)$

luego por (1) y (2) se tiene que $\text{Rec}\, f = \mathbb{R}$, lo que prueba que f es sobre.

Intercambiando x por y en (1) y (2), se tiene:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2 - \frac{x}{2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Fórmula para $(f^{-1} \circ g)(x)$

$$(f^{-1} \circ g)(x) = \begin{cases} f^{-1}(-1) \quad \text{si} \quad x \leq 0 & \begin{cases} 2 - (-1) & \text{si} \quad -1 \geq 0 \\ 2 - \frac{(-1)}{2} & \text{si} \quad -1 < 0 \end{cases} \\ f^{-1}(x-1) \quad \text{si} \quad x > 0 & \begin{cases} 2 - (x-1) & \text{si} \quad x - 1 \geq 0 \\ 2 - \frac{x-1}{2} & \text{si} \quad x - 1 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ahora como: $(x \leq 0 \ \wedge -1 \geq 0) \Rightarrow \emptyset$; $(x \leq 0 \ \wedge \ -1 < 0) \Rightarrow x \leq 0$;

$(x > 0 \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \Rightarrow x \geq 1$; $(x > 0 \ \wedge \ x - 1 < 0) \Rightarrow 0 < x < 1)$

luego

$$(f^{-1} \circ g)(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \frac{5-x}{2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 3 - x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

9. Dadas en $\mathbb{R}$: $f(x) = x^2, \ g(x) = \frac{1}{x}$ y $h(x) = sen\, x$

a) Calcule: $(f+g)(-2)$, $(fg)\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{h}{g}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $(f \circ h)\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y $(g \circ h)\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) Hallar el dominio de: $f + g$, $g \circ h$, $h \circ g$, $g \circ g$ y $\frac{g}{fh}$

Solución.

a) $(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = (-2)^2 + \frac{1}{-2} = \frac{7}{2}$

$(fg)\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \frac{3}{\pi} = \frac{\pi}{3}$

$\left(\frac{h}{g}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{sen\frac{\pi}{2}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{2}$

$(f \circ h)\left(\frac{\pi}{6}\right) = f(h(\frac{\pi}{6})) = f(sen\frac{\pi}{6}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$(g \circ h)\left(\frac{\pi}{3}\right) = g(h(\frac{\pi}{3})) = g(sen\frac{\pi}{3}) = g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

b) Como Dom $(f+g)$ =Dom $f\cap$Dom g; Dom $f=\mathbb{R}$, Dom $g=\mathbb{R}-\{0\}$ entonces
Dom $(f+g)=\mathbb{R}-\{0\}$
Dom $(g\circ h)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ x\in$Dom $h\ \wedge\ h(x)\ \in$Dom $g\}$, como $(g\circ h)(x)=g(sen\,x)$
$=\frac{1}{sen\,x}\Rightarrow$Dom $(g\circ h)=\{x\in\mathbb{R}\ :x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, de igual forma como
$(h\circ g)(x)=sen\left(\frac{1}{x}\right)\ \Rightarrow$Dom $(h\circ g)=\{x\in\mathbb{R}\ :x\neq 0\}$
$(g\circ g)(x)=g(\frac{1}{x})=x$, aparentemente $\forall\,x\in\mathbb{R}$, pero de la definición $x\in$Dom $g\Rightarrow$
Dom $(g\circ g)=\mathbb{R}-\{0\}$.

10. Sean f y g dos funciones definidas en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x)=\frac{x+|x|}{2},\qquad g(x)=\begin{cases}x & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Demuestre que: $f\circ g=g\circ f$

Solución.

Recordemos que: $|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{si } x<0\end{cases}$

i) $\forall\ x<0,\ (f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x)=\frac{x+(-x)}{2}=0$
$\forall\ x\geq 0,\ (f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=\frac{x^2+|x^2|}{2}=x^2$, por otra parte

ii) $\forall\ x<0,\ (g\circ f)(x)=g(f(x))=g(0)=0^2=0$
$\forall\ x\geq 0,\ (g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=x^2$

Por i) y ii) se concluye que: $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

11. Dados a, b, c y d constantes reales, donde $f(x)=ax+b$; $g(x)=cx+d$. Encuentre la condición necesaria y suficiente para tales constantes de modo que $f\circ g=g\circ f$

Solución.

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)\Leftrightarrow f(cx+d)=g(ax+b)\Leftrightarrow a(cx+d)+b=c(ax+b)+d$

$\Leftrightarrow acx+ad+b=cax+cb+d\Leftrightarrow ad+b=cb+d$, que es la condición pedida.

12. Se define $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, por $f(x)=\begin{cases}x^2-3x & \text{si } x\geq 2\\ x-4 & \text{si } x<2\end{cases}$

a) Pruebe que f es biyectiva

b) Determine una fórmula para f^{-1} y luego grafique f y f^{-1} en el mismo sistema.

Solución.

a) Debemos probar que f es: uno a uno y sobre$\Rightarrow f$ es biyectiva,

Uno a uno:

i) $\forall\, x_1, x_2 \geq 2,\ f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 - 3x_1 = x_2^2 - 3x_2 \Leftrightarrow$ $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 3) = 0,$ ahora notemos que $x_1 + x_2 - 3 \geq 1$ pues $x_1, x_2 \geq 2$ entonces $x_1 = x_2$

ii) $\forall\, x_1, x_2 < 2,\ f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 - 4 = x_2 - 4 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

iii) $\forall\, x_1 \geq 2 \ \wedge\ x_2 < 2$ como $x_1 \neq x_2$ probaremos que $f(x_1) \neq f(x_2)$ suponiendo para ello que $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 - 3x_1 = x_2 - 4 \Leftrightarrow x_2 = (x_1 - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}$ pero $x_2 < 2 \Rightarrow (x_1 - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} < 2 \Rightarrow (x_1 - \frac{3}{2})^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 < 2$ lo que contradice la hipótesis, luego $f(x_1) \neq f(x_2),\ \forall\ x_1 \neq x_2$.

Por i), ii) y iii) se concluye que f es uno a uno.

Sobre:

i) $\forall\ x \geq 2 \Rightarrow y = x^2 - 3x \Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} = y \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{y + \frac{9}{4}}$

como $x \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{2} + \sqrt{y + \frac{9}{4}} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{y + \frac{9}{4}} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$
$y \geq -2, \qquad (1)$

ii) $\forall\, x < 2 \Rightarrow y = x - 4 \Leftrightarrow x = y + 4$ pero $x < 2 \Rightarrow y + 4 < 2 \Rightarrow$
$y < -2, \qquad (2)$

Por (1) y (2) concluimos que el Rec $f = \mathbb{R},$ lo que prueba que f es sobre.

b) De (1) permutando x por y se tiene $y = \frac{3}{2} + \sqrt{x + \frac{9}{4}},\ \forall x \geq -2$ análogamente de (2) se tiene $y = x + 4,\ \forall x < -2$, en resumen

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} + \sqrt{x + \frac{9}{4}} & \text{si} \quad x \geq -2 \\ x + 4 & \text{si} \quad x < -2 \end{cases}$$

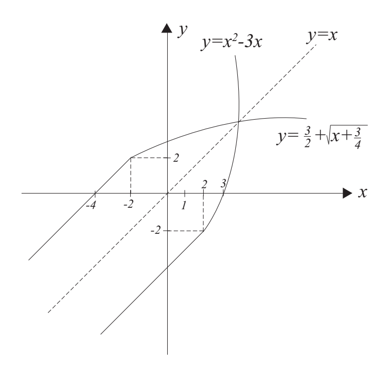


Figura 2.19: Gráficos de f y f^{-1}

13. El perímetro de un rectángulo de lados x e y es dado, determine la función que calcula el área del rectángulo en términos del lado x.

Solución.

Sea P el perímetro del rectángulo de lados x e y y A su área, entonces

$P = 2x + 2y \ \ (1)$, por otra parte $A = x\,y \ \ (2)$, de (1) $y = \frac{P}{2} - x \Rightarrow A = x(\frac{P}{2} - x)$ note que $0 < x < \frac{P}{2}$

14. Un espejo rectangular de lados $80\,cm. \times 100\,cm.$ se rompe en una esquina como se indica en la Figura 2.20. Determine el área de la sección achurada en la Figura 2.21 en términos de una sola variable (x o y).

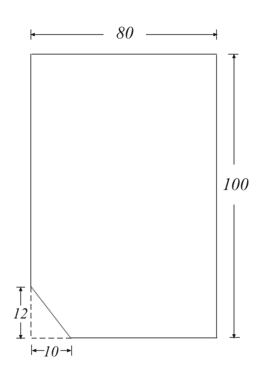


Figura 2.20: Espejo roto

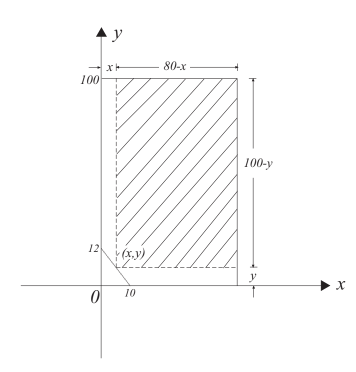


Figura 2.21: Area a calcular

Solución.

Notemos que la función que determina el área esta dada por $A = (80 - x)(100 - y)$ Por otra parte de la $fig.(2)$ se tiene $\frac{x}{2} = \frac{12-y}{12} \Leftrightarrow y = 12 - \frac{6}{5}\,x$ por lo tanto $\text{A}(x) = (80 - x)\left(100 - 12 + \frac{6}{5}\,x\right) = (80 - x)\,(88 + \frac{6}{5}\,x)$ con $0 \leq x \leq 10$.

15. En el cuadrado $ABCD$ de lado $AB = 2$ se traza una recta MN perpendicular a la diagonal AC. Sea x la distancia desde el vértice A a la recta MN, expresar en función de x el área S del triángulo AMN que se saca del cuadrado por medio de la recta MN. Hallar esta área para $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y para $x = 2$.

Solución.

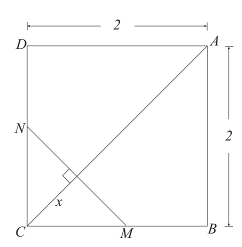


Figura 2.22: Cuadrado ABCD

Obsérvese que $AC = 2\sqrt{2} \ \Rightarrow 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$

$= 4 - (2\sqrt{2} - x)^2 \Rightarrow S\,(x) = -x^2 + 4\sqrt{2}\,x - 4$, por tanto

$$S\,(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \ \ 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ -x^2 + 4\sqrt{2}\,x - 4 & \text{si} \ \ \sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Como: $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{2} \Rightarrow S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$

$S\,(2) = -2^2 + 4\sqrt{2}\cdot 2 - 4 = 8(\sqrt{2} - 1)$

16. Se quiere unir dos puntos A y B mediante un cable de fibra óptica, los que se encuentran separados por un río de orillas paralelas, A en una orilla y B en la otra distantes $50\,km.$ entre si, el río es de $1\,km.$ de ancho. Si se sabe que el costo por $km.$ de cable por el agua es, el doble más caro que por tierra. Determine la función de costo que se puede plantear.

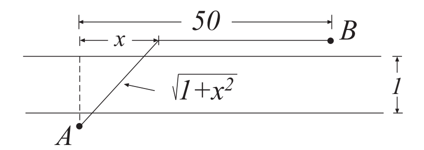


Figura 2.23: Ejercicio 16

Solución. Sean $\$\ p$ el costo de $km.$ de cable por tierra, entonces $\$\ 2p$ el costo de $km.$ de cable por el agua y sea $C(x)$ la función de costo a determinar.

Por tanto se tiene:

$C\,(x)\ = 2p\,\sqrt{1+x^2}\ + p\,(50 - x\,)$, con $0 \leq x \leq 50\ fig.$

17. Un triángulo isósceles tiene uno de sus vértices en el punto $(0,1)$ y los otros dos vértices en la parábola $y = 4 - x^2$, determine la función que calcula el área del triángulo en términos de la variable x.

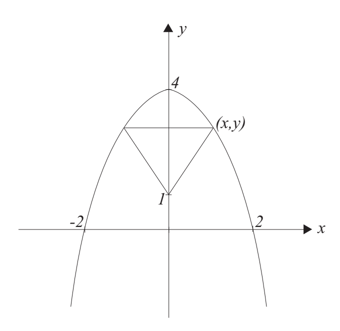


Figura 2.24: Ejercicio 17

Solución.

De la figura se tiene:

$A(x) = 2\,x(y-1) = 2\,x(4 - x^2 - 1)$,si $0 \leq x < \sqrt{3}$

$= 2\,x\,(3 - x^2)$

$A(x) = 2\,x(1-y) = 2\,x(x^2-3)$, si $\sqrt{3} \leq x < 2$,

en resumen:

$A(x) = 2\,x\,|3 - x^2|,\ \forall\, x : 0 \leq x \leq 2$

2.13. Ejercicios Propuestos

1. Determine el dominio y recorrido de las siguientes funciones definidas en los reales.

a) $f(x) = 4 - 2x^2$
b) $f(x) = x^2 - 2x$
c) $f(x) = |x^2 - 2\,x\,|$
d) $f(x) = \frac{x-2}{x}$
e) $f(x) = \frac{1}{2-\sqrt{1-x}}$
f) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
g) $f(x) = \sqrt{4-|x|}$
h) $f(x) = \frac{4}{2-|x+1|}$

Respuestas.

a) Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = (-\infty, 4]$
b) Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [-1,+\infty)$
c) Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [0,+\infty)$
d) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$, Rec $f = \mathbb{R} - \{1\}$
e) Dom $f = (-\infty, -3) \cup (-3, 1)$, Rec $f = (-\infty, 0) \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$
f) Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = \mathbb{R} - \{1\}$
g) Dom $f = [-4, 4]$, Rec $f = [0, 2]$
h) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$,Rec $f = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$.

2. Dada la relación f en $\mathbb{R}$, por $f\,(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-9}$

a) ¿Es función? si no lo es encontrar el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$, tal que sea su dominio para que sea una función.
b) Determine el dominio y recorrido de f tal que sea biyectiva y encuentre una fórmula para $f^{-1}(x)$.

Respuesta.

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$,
b) Dom $f = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$, Rec $f = \mathbb{R} - \{\frac{5}{6}, 1\}$; $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{1-y}$

3. Sean las funciones f y g tales que $f\,(x) = x^2 - 2\,x - 2$ y $g\,(x) = a\,x + b$.

Determine a y b, de modo que $f \circ g = g \circ f,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Respuesta.

$(\,a = 0\ \wedge\ b = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}) \vee (\,a = 1\ \wedge\ b = 0\,)$

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por $f\,(x) = 3\,x + 4$, demuestre que f es biyectiva y encuentre una fórmula para f^{-1}.

Respuesta.

$f^{-1}\,(x) = \frac{1}{3}(x - 4)$

5. Sea $f : \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ una función dada por $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ probar que f es uno a uno y sobre y luego hallar una fórmula para f^{-1}.

   Respuesta.

   $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-2x}$

6. Sean f y g funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por:

   $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2\,x & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

   a) Demostrar que f es biyectiva.

   b) Hallar fórmula para f^{-1}.

   c) Grafique f y f^{-1} en un solo sistema.

   d) Determine una fórmula para $g \circ f^{-1}$

   Respuesta.

   c)

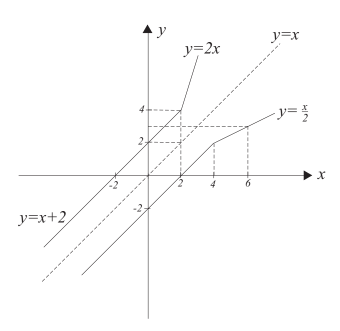


Figura 2.25: Gráfico de f y f^{-1}

   d)$(g \circ f^{-1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 3 \\ 0 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$

7. Sean $A = [-4, 4]$; $B = [0, 4]$ y $C = [-4, 0]$; $R_1 : A \to B$; $R_2 : A \to C$; $R_3 : B \to A$ y $R_4 : B \to C$. Dada $R_i = \{\,(x, y) : x^2 + y^2 = 16\,\}\ \forall\, i = 1, 2, 3, 4$ representar R_i en un plano cartesiano y establecer si la relación es o no una función.

   Respuesta.

   R_1, R_2 y R_4 son funciones.

8. Determinar cuáles de las siguientes relaciones son funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, justifique. Grafique R_1, R_2 y R_3.

   a) $R_1 = \{\,(x, y) : 3x + 5y = 8\,\}$

   b) $R_2 = \{\,(x, y) : x^2 + y^2 > 1\,\}$

   c) $R_3 = \{\,(x, y) : x = y\,\}$

d) $R_4 = \{ (x, y) : y^2 - x^2 = 0 \}$
e) $R_5 = \{ (x, y) : y^3 - x^3 = 0 \}$

Respuesta.

R_1, R_3 y R_5 son funciones.

9. Cada una de las siguientes fórmulas define una función de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hacer el gráfico de cada una de ellas en el plano cartesiano.

a) $f(x) = 2x - 1$
b) $f(x) = x^2 - 2x - 1$
c) $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$
d) $f(x) = |x|^2 - 2|x| - 1$
e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 2 \\ 4 & \text{si } -6 \leq x < 2 \\ x + 10 & \text{si } x < -6 \end{cases}$
f) $f(x) = \begin{cases} |x+1| - 2 & \text{si } |x| \leq 2 \\ 1 - x & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$

10. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = sen\, x$ y $h(x) = \sqrt{x-1}$
Hallar: $f(5)$; $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $h(10)$; $(f \circ g)\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $(g \circ f)(1)$; $(f \circ h)(17)$; $(f \circ g \circ h)(x)$;
$(f \circ h \circ g)(x)$; $(g \circ f \circ h)(x)$; $(f + g)(x)$; $(h - g)(x)$; $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$; $[h \circ (f + g)](x)$
$f(x+k) - f(x)$; $\frac{1}{k}[h(x+k) - h(x)]$.
Respuesta.
$f(5) = 26$; $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; $h(10) = 3$; $(f \circ g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$; $(g \circ f)(1) = sen\, 2$; $(f \circ h)(17) = 17$; $(f \circ g \circ h)(x) = sen^2\sqrt{x-1} + 1$; $(f \circ h \circ g)(x) = sen\, x$ note que en este caso $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ luego $(f \circ h \circ g)(x) = 1$;
$(g \circ f \circ h)(x) = sen\, x$, $\forall x \geq 1$; $(f + g)(x) = x^2 + 1 + sen\, x$; $(h - g)(x) = \sqrt{x-1} - sen\, x$; $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{sen\, x}{x^2+1}$; $[h \circ (f + g)](x) = \sqrt{x^2 + 1 + sen\, x}$
$f(x+k) - f(x) = 2kx + k^2$; $\frac{1}{k}[h(x+k) - h(x)] = \frac{1}{\sqrt{x+k-1} - \sqrt{x-1}}$

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
Pruebe que f es biyectiva y luego encuentre una fórmula para f^{-1}.
Respuesta.
$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + \sqrt{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

12. Sean $f : X \to Y$ y g: $Y \to X$ funciones tales que $g \circ f$ es la identidad en X.

    Pruebe que f es uno a uno y g es sobre.

13. Averigue si la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

    $$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 3 \\ 2x - 1 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

    tiene función inversa $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

    Respuesta.

    No tiene inversa, pues no es sobre.

14. Sean f y g dos funciones en $\mathbb{R}$, dadas por:

    $$g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si} \quad x < -2 \vee x > 2 \end{cases}$$

    determine una fórmula para $(f \circ g)(x)$.

    Respuesta.

    $$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq |x| \leq \sqrt{3} \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \sqrt{3} \vee |x| < 1 \end{cases}$$

15. Sea $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $(f \circ g)(x) = a\,x + b$; f y g polinomios de grado 1

    i) Si $f(x) = c\,x + d$, $c \neq 0$; determine la función $g(x)$.

    ii) Si $g(x) = p\,x$, $p \neq 0$; determine $f(x)$.

    Respuesta.

    i) $g(x) = \frac{1}{c}(a\,x + b - d)$

    ii) $f(x) = \frac{a}{p}\,x + b$

16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}\,x + 3$ y $f \circ g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(f \circ g \circ f)(x) = 6\,x - 9$. Determine $g(x)$, si g es un polinomio de grado 1.

    Respuesta.

    $g(x) = 54\,x - 198$.

17. Para qué números a, b, c, y d la función $f(x) = \frac{ax+d}{cx+b}$ satisface $(f \circ f)(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

    Respuesta.

    $(a = b \neq 0 \,\wedge\, c = d = 0) \vee (a = -b$ con $a^2 + cd \neq 0)$

18. *a*) Suponga $f(x) = x + 1$. ¿Existen funciones $g(x)$ tales que $f \circ g = g \circ f$?

b) Suponga que f es una función constante. ¿Para qué funciones g se cumple que $f \circ g = g \circ f$?

c) Supóngase que $f \circ g = g \circ f$ para todas las funciones g. Demostrar que f es la función identidad.

Respuesta.

a) y b) $g(x) = x$

19. Demostrar que si: $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones uno a uno, entonces la función $g \circ f : A \to C$ es uno a uno.

20. Sea $A = [0, +\infty)$ y dadas las funciones f, g y h de $A \to A$ por $f(x) = x^2$;

    $g(x) = x^3 + 1$ y $h(x) = x - 2$ ¿Cuál(es) de estas funciones es sobre?

    Respuesta.

    Solo f.

21. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

    $$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \leq 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

    Averiguar si f es uno a uno o sobre.

    Respuesta.

    f es sobre pero no es uno a uno.

22. Sea f definida en $\mathbb{R}$ por

    $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ -(2x+1) & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

    Demuestre que existe f^{-1} y luego determine una fórmula para ella, grafique f y f^{-1}.

    Respuesta.

    $$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si } x \geq 1 \\ -\frac{1}{2}(x+1) & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

23. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que:

    $f(x) = 3x$ si $x \leq 1 \wedge f^{-1}(x) = x^2 - 8$ si $x > 3$ demuestre que f es biyectiva.

24. En $\mathbb{R}$ se definen las funciones f y g por

    $$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x > 0 \\ x+2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x > 3 \\ x^2 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

    a) Muestre que f es biyectiva y que g no lo es.

    b) Determine fórmulas para: $f \circ g$ y $g \circ f$.

Respuesta.

b) $$(g\circ f)(x)=\begin{cases}2x^2+9 & \text{si} \quad x>1\\ (x^2+2)^2 & \text{si} \quad 0<x\leq 0\\ (x+2)^2 & \text{si} \quad x\leq 0\end{cases}$$

25. Demostrar que si $f:A\to B$ y $g:B\to C$ tienen inversas, entonces $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

26. *a*) Demostrar que para la función $f(x)=1-|\,2x-1\,|$, con $0\leq x\leq 1$ se tiene $f(x)=f(1-x)$

    b) Sea $g(x)=2x+5,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$ calcúlese $f\circ g$ y $g\circ f$ siendo f la función definida en a).

27. Dada $f(x)=\frac{ax-b}{cx+d}$, determine las condiciones necesarias y suficientes entre las constantes a,b,c y d para que se verifique $(f\circ f^{-1})=x$ indicando además el dominio y recorrido de f.

    Respuesta.

    $ad+bc\neq 0$; Dom $f=\mathbb{R}-\{-\frac{b}{c}\}$, Rec $f=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$, $c\neq 0$.

28. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro es de 5m., encontrar la función que expresa el área de la ventana en términos de la longitud de la base del rectángulo.

    Respuesta.

    $A(x)=\frac{5}{2}\,x-\frac{1}{8}(\,4+\pi)\,x^2$.

29. Un rectángulo se encuentra inscrito en una circunferencia de radio r. Determine la función que calcula su área en términos de la longitud de uno de sus lados.

    Respuesta.

    $A(x)=x\sqrt{4\,r^2-x^2},\ 0<x<2\,r$.

30. Un triángulo tiene dos de sus vértices en los puntos $(0,0)$ y $(4,0)$ .Su tercer vértice se encuentra en la curva $x^2y=1$. Determine la función que calcula el área del triángulo en términos de la abscisa del tercer vértice.

    Respuesta.

    $A(x)=\frac{2}{x^2},\ x>0$.

31. La función $f(x)$ está definida para $0\leq x\leq 1$. ¿Cúales son los dominios de definición de las funciones siguientes?: $f(3\,x^2),\ f(x-5),\ f(2x+3)$, $f(1+|x|)$ y $3f(x)$.

    Respuesta.

    $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{3}},\ 5\leq x\leq 6,\ -\frac{3}{2}\leq x\leq -1,\ x=0,\ 0\leq x\leq 1.$